数理解析研究所講究録
79巻 1969年 1-19

Function algebra と Hardy class における extreme point

早大 教育 和田淳藏
神奈川大工 大庭幸雄

§1. 序

Eを局所凸線型位相空間とし、KをEの中のコンパクト凸集合としたとき、Kの端点(extreme point)全体の閉凸包(closed convex hull)がKに一致するという結果はKrein-Milmanの定理としてよく知られている。ここでKがコンパクトでない場合、たとえばEをBanach空間としてKをその単位球(unit ball)とおいたとき、この事柄は一般に成り立たない。たとえばXをコンパクトHausdorff空間とし、$C_R(X)$をXの上の実数値連続関数全体のBanach空間としたとき、$C_R(X)$の単位球UがUの端点全体の閉凸包に一致するための必要かつ十分条件はXがtotally disconnectedとなることである(Goodner [11] 参照)。ここでXの上の複素値連続関数全体のBanach空間C(X)の場合は、Uはその端点全体の閉

凸包に一致する(Phelps [16])。このあと、E が Hardy class および function algebra のとき、その単位球 U の端点はどのようなものかについて考えて見る。Hardy class の単位球の端点については、以前から Rudin−de Leeuw, Hoffman などによつて研究されたが、それを Riemann 面の上の Hardy class の場合に拡張した Gamelin and Voichick [8] の研究にもふれる。また端点の問題の応用として H^1 の等長写像や H^1 の extremum problem などについて考える。つぎに Function algebra の単位球の端点について考察する。U がその端点全体の閉凸包に一致するための function algebra A の条件に関しては、すでに Phelps [16] がログモジュラー環(logmodular algebra)の場合に条件を出しているが、もう少し function algebra のクラスを広くしてこの問題を吟味して見る。またこれに関連して disk algebra においての Blaschke product の convex combination の一様近似の問題などにもふれることにする。

§2. Hardy class の単位球の端点

Hardy class H^p の単位球の端点を考える際に $p=1$ および $p=\infty$ のときに考えればよい。なんとなれば $1<p<\infty$ の場合は L^p に含まれる $\|f\|=1$ となるすべての f が L^p の単位球の端点となるゆえ当然 H^p の $\|f\|=1$ となるすべての f が

H^p の単位球の端点となるからである。この理由から今後 Hardy class H^p の単位球の端点を考える際に $p=1$, および $p=\infty$ の場合のみを考えればよいこととなる。このあと Hardy class H^1, H^∞ における端点を考えるが、古典的な H^1, H^∞ および、それを Riemann 面の上で考えた H^1, H^∞ の単位球の端点について論ずる。

§3 Hardy class H^1 の場合

H^1 の単位球の端点については、つぎの Rudin-de Leeuw [14] の定理がある。

定理 3.1 $f\in H^1$, $\|f\|=1$ とする。f が H^1 の単位球の端点となるための必要かつ十分条件は f が外部関数 (outer function) となることである。すなわち単位円上で定義された実数値積分可能関数 $k(\theta)$ で $f(z)=\lambda\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}k(\theta)d\theta\right]$ ($|\lambda|=1$) となること、または $f\neq 0$ であって $\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta$ となることである。

証明。$\|f\|=1$, f を外部関数とする。いま f が単位球の端点であることを証明するために、$g\in H^1$ を $\|f\pm g\|\leqq 1$ とおく。この場合勿論 $\|f\pm g\|=1$。いま $\varphi=g/f$ とおけば、φ は $d\mu=\frac{1}{2\pi}|f|d\theta$ に関して積分可能となる。ここで μ は全測度 1 の正測度で $\int[|1+\varphi|+|1-\varphi|]d\mu=2$。しかし $|1+\varphi|+|1-\varphi|\geqq 2$ となり、μ の全測度が 1 であるから $|1+\varphi|$

$+ |1-\varphi| = 2$ (a.e.)。これから $-1 \leqq \varphi \leqq 1$ (a.e.) が出る。ゆえに $g = \varphi f$ $(-1 \leqq \varphi \leqq 1)$。かくして単位円の上で $|g| \leqq |f|$ となり、f は外部関数なるゆえ $|g(z)| \leqq |f(z)|$ $(|z|<1)$。それゆえ $\varphi = g/f$ は有界な解析関数であって単位円の上では実数値をとる。これから φ は定数となり $(1+\varphi)\|f\| = 1$ から $\varphi = 0$。そして $g = 0$。かくして f は H^1 の単位球の端点となる。逆に $f \in H^1$, $\|f\|=1$ は外部関数でないとする。すなわち $f = IF$, I は定数でない内部関数, F は外部関数とする。I に $|\lambda| = 1$ となる複素数 λ をかけることにより $\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})| \mathrm{Re}\, I(e^{i\theta})\, d\theta = 0$ とする。ここで $g = \frac{1}{2}(1+I^2)F$ とおく。$g\ (\neq 0) \in H^1$ は明らか。さて $|I(e^{i\theta})| = 1$ で $2\mathrm{Re}\, z = \frac{1+z^2}{z}$ $(|z|=1)$ なるゆえ $g(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})\, \mathrm{Re}\, I(e^{i\theta})$。かくして $|f(e^{i\theta}) \pm g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|[1 \pm \mathrm{Re}\, I(e^{i\theta})]$, ゆえに $\|f \pm g\| = \|f\| = 1$, そして $g \neq 0$。ゆえに f は H^1 の単位球の端点ではない。

上の定理からつぎが導かれる。

定理 3.2　H^1 の単位球の端点全体の集合の閉包に関数 f が含まれるための必要かつ十分条件は $\|f\| = 1$ であって f は単位開円板 D の上で0点をもたないことである。

証明。$f \in H^1$ で $\|f_n - f\|_1 \to 0$ (f_n はノルム1の外部関数) とする。そのとき $\|f\|_1 = 1$ であり、単位円の上の L_1 ノルムで

$f_n \to f$ であるから、Dの任意のコンパクト集合の上で一様に $f_n \to f$ となる。それゆえ f は D の上に 0 点をもたないかまたは $f \equiv 0$。$\|f\|_1 = 1$ なるゆえ $f \neq 0$。逆に $\|f\|_1 = 1$, f は D の上で 0 点なしとする。$f_r(z) = f(rz)$ $(0 < r < 1)$ とすれば、$\|f_r - f\|_1 \to 0$ $(r \to 1)$。ここで f_r は外部関数である、なんとなればある c で $|f_r(z)| \geqq c > 0$ となるからである。ここで $g_r = \|f_r\|_1^{-1} f_r$ とすれば g_r は H^1 の単位球の端点で $g_r \to f$ $(r \to 1)$。

つぎに R を finite open Riemann surface とし、R は t 個の閉曲線からなる smooth boundary bR をもつとする。$H^\infty(R)$ で R の上の有界解析関数全体の環を表わす。$H^\infty(R) \ni f$ のノルム $\|f\|$ は $\sup_R |f|$ である。また $A(R)$ は $H^\infty(R)$ の関数で bR 迄連続に拡張出来るもの全体の環とする。つぎに g を R の固定した点とし、$d\mu$ を bR の上の g に関する harmonic measure とする。$H^1(d\mu)$ で R の上の解析関数 f で $|f|$ が harmonic majorant をもつものの全体とする。$f \in H^1(d\mu)$ のノルム $\|f\|$ を $\|f\| = u(g)$ とおく。ここで u は $|f|$ の最小の harmonic majorant とする ([19], [8])。ここでまた $\|f\| = \int_{bR} |f|\, d\mu$ となる。R を上のような Riemann 面としたときつぎが成り立つ。

定理 3.3　$f \in H^1(d\mu)$, $\|f\| = 1$. f が $H^1(d\mu)$ の単位球の端点でないための必要かつ十分条件は定数でない実関数 k

$\in L^\infty(d\mu)$ が存在して、∂R の上で kf は $H^1(d\mu)$ のある関数の boundary function となることである。

証明　必要条件の証明は定理3.1の中の証明とほぼ同じ。十分条件：定数でない実関数 $k \in L^\infty(d\mu)$ で $kf = h \in H^1(d\mu)$ とする。ここで k に実数の定数を加えることにより $\int k|f|d\mu = 0$。またこの k に正の定数を乗ずることにより、$-1 \leqq k \leqq 1$ と仮定してよい。このとき $\|f \pm h\| = \int (1 \pm k)|f|d\mu = \int |f|d\mu = 1$。そして $f = \frac{1}{2}(f+h) + \frac{1}{2}(f-h)$ から f は端点でない。

さて H^1_m で、R の上で定義された多価解析関数 f で $|f|$ が1価であり、$|f|$ が R で harmonic majorant をもつもの全体を表わすとする。$f \in H^1_m$ が外部関数 (outer function) であるとは、$\log|f(g)| = \int_{\partial R} \log|f|d\mu$ をみたすときとする。また H^∞_m で、有界な H^1_m の中の関数全体を表わす。$f \in H^\infty_m$ が内部関数 (inner function) であるとは ∂R の上で $|f| = 1$ (a.e.) となることをいう。いま f を内部関数とする。f が extremal であるとは、実関数 $k \in L^\infty(d\mu)$ で kf が H^∞_m の1つの関数の boundary function であり F と同じ periods (modulo 2π) をもてば必ず k が定数となることとする。

定理3.4　$f \in H^1(d\mu)$, $\|f\| = 1$ とする。f が単位球の端点となる必要かつ十分条件は f の内部部分が extremal となることである。

系3.5　$f \in H^1(d\mu)$, $\|f\|=1$ とする。f が外部関数ならば f は $H^1(d\mu)$ の単位球の端点となる。

証明　関数1は内部関数で extremal である。いま f が外部関数なら、$f = 1 \cdot f$ となるゆえ前定理より f は $H^1(d\mu)$ の単位球の端点となる。

つぎの定理は定理3.2の Riemann 面の場合への拡張である。R を t 個の閉曲線からなる smooth boundary ∂R をもつ finite open Riemann surface としたとき R の一次元 Betti 数 γ は $\gamma = 2s + t - 1$ となる。ここで s は R の genus である。

定理3.6　$H^1(d\mu)$ の単位球の端点全体の集合の閉包に関数 f が含まれるための必要かつ十分条件は $\|f\| = 1$ であって、かつ f の0点の数（重複も数えて）が $\gamma/2$ を超えないことである。

これは Riemann-Roch の定理[18]を用いて証明される。

また定理3.2の1つの応用としてつぎの定理が成立する。

定理3.7　H^1 から H^1 の上への任意の等長線型写像 Φ は

$$(\Phi f)(\lambda) = \alpha \tau'(\lambda) f(\tau(\lambda))$$

となる。ここで α は $|\alpha| = 1$ となる複素数、τ は単位開円板からそれ自身の上への等角写像である。逆に上のように定義された Φ は H^1 から H^1 の上への等長線型写像である。

つぎに H_1 における extremum problem を考えて見る。単位円を Γ とし、ϕ を Γ の上の有界可測関数とする。H^1 の上の汎関数 T_ϕ をつぎのように定義する。

$$T_\phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\phi(e^{i\theta})d\theta \quad (f \in H^1).$$

T_ϕ は H^1 の上の有界汎関数であるが、逆に任意の H^1 の上の有界汎関数は上のような形となる。extremum problem は $T_\phi(f) = \|T_\phi\|$ となる f ($f \in H^1$, $\|f\| = 1$) を求めることである。

定理 3.8 (a) $\|f\| = 1$ で $|f(z)| > \delta > 0$ ($|z| < 1$) となる $f \in H^1$ が extremum problem の解となれば、f は唯一の解となる。

(b) extremum problem の解が二つ以上あれば、無限に多くの解(それは外部関数である)が存在する。

(c) $|a| < 1$ に対して $f(a) = 0$ となるような extremum problem の解 f が存在する(上の (b) の条件を仮定して)。

ϕ にもっと強い条件が加わった場合、たとえば ϕ は Γ の上で連続または $|z| > R$ で analytic ($\exists R < 1$) のときは、もっとはっきりした結果がでる。

§4 Hardy class H^∞ の場合

§3 で述べたような Riemann 面においてつぎが成り立つ。

定理 4.1 $f \in H^\infty(R)$ が $H^\infty(R)$ の単位球の端点であるための必要かつ十分条件は $\|f\| = 1$ であって、かつ $\int \log[1 - |f|]\, d\mu = -\infty$ となることである。測度 μ について

は§3において説明されている。

証明　上の積分の式が成立すると仮定する。$g \in H^\infty(R)$ を $\|f \pm g\|_\infty \leqq 1$ とする。そのとき $g=0$ なることを証明する。$\|f \pm g\|_\infty \leqq 1$ から $|f(z)|^2+|g(z)|^2 \leqq 1$。$\mathscr{b}R$ の上で $|g|^2 \leqq 1-|f|^2$ であるから

$$2\int_{\mathscr{b}R} \log|g|\,d\mu \leqq \int_{\mathscr{b}R} \log(1+|f|)\,d\mu + \int_{\mathscr{b}R} \log(1-|f|)\,d\mu$$

$$=-\infty\,.$$

ゆえに $\mathscr{b}R$ の上の1つの正測度の部分集合の上で $g=0$ となり、結局 R の上で $g=0$ となる。これは f が端点となることを表わす。逆に上の積分(定理の中の)の式が成立しないとする、すなわち $\log[1-|f|]$ が積分可能とする。ここで $g \in H^\infty(R)$ ($g \neq 0$) で $\mathscr{b}R$ の上で $|g| \leqq 1-|f|$ となるようなものが存在することが証明できる。これは $\|f \pm g\|_\infty \leqq 1$ となることを示す。すなわち f は $H^\infty(R)$ の単位球の端点でなくなる。

§5　Function algebra の場合

A をコンパクト Hausdorff 空間の上の function algebra とする。U を A の単位球とする。まずつぎの定理が成立する。

定理 5.1　$g \in U$ とする。g が U の端点でない必要かつ十分条件は、$h \in A$, $h \neq 0$ が存在して $|g(x)|+|h(x)| \leqq 1$ (

$x \in X$ ）が成り立つことである（Phelps [15] ）。

A を disk algebra としたとき、$f(z) = z^n$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$ ）はすべて U の端点となるわけである。

R を §3 で定義されたような Riemann 面とし、$A(R)$ を $\bar{R}$ にまで連続的に拡張できる $H^\infty(R)$ の関数全体からなる function algebra とする。$A(R)$ の単位球の端点について考える際に、定理 5.1 と 4.1 とを考え合わせるとつぎのようになる。ここで $R = D$ = 単位開円板のとき端点の問題を考える際には $A(R)$ は disk algebra と考えてよい。U を $A(R)$ の単位球とする。

定理 5.2　$f \in A(R)$ が U の端点であるための必要かつ十分条件は $\|f\|_\infty = 1$ でかつ、$\int \log[1 - |f|]\, d\mu = -\infty$ となることである。

このあと一般の function algebra の単位球の端点について考えるが、その場合端点より強い条件をみたす exposed point について述べる。E を実位相線型空間とし、K を E の中の閉凸部分集合とする。K の点 x が K の exposed point であるとは、$L \in E^*$ が存在して $L(x) = \sup L(K)$ でかつ $L(y) < L(x)$ ($y \in K$, $y \neq x$ ）となるときとする。幾何学的にいえば、点 x を通るある超平面 H があって、K をその片側に含みかつ H と K とは唯一点 x しか共有しない場合である。E が複素位相線型空間のときは、それを実線型空間と考えて上の定義に

従う。ゆえに複素空間の場合、Kの点xがKの exposed point であるとは、$L \in E^*$が存在して $\mathrm{Re}\, L(x) = \sup \mathrm{Re}\, L(K)$ でかつ $\mathrm{Re}\, L(y) < \mathrm{Re}\, L(x)$ $(y \in K,\ y \neq x)$ ということになる。勿論 exposed point は端点となることは明らか。Aを disk algebra としたときつぎが成立する（Phelps [16]）。

定理 5.3　Aを disk algebra とする。$f \in U$がUの exposed point となるための必要かつ十分条件は、つぎの集合 Fが正の Lebesgue 測度をもつことである。

$$F = \{\theta\,;\ -\pi \leqq \theta < \pi,\ |f(e^{i\theta})| = 1\}.$$

つぎにもっと一般な function algebra においてUの exposed point について考える。

AをXの上の function algebra とし、Aの極大イデアル空間をM_Aとする。Aの Gleason part Pが total over Aであるとは、$f \in A$が$f \neq 0$ならfはPの上で$f \neq 0$となるときにいう。Aが disk algebra, H^∞をログモジュラー環として見たとき、および"Big disk" algebra のとき、Aは total over Aとなる Gleason part をもつ。

つぎにφを Gleason part Pの一点とし、それを固定する。μをφの representing measure としたときつぎが成り立つ（Phelps [16]）。

定理 5.4　Aを logmodular algebra とし、Gleason part

$\mathcal{P}$ が total over A となるとする。$\mathcal{P} \ni \varphi$ に対し φ の representing measure を μ とし、$F = \{x \in X : |f(x)| = 1\}$ とおいたとき、$\mu(F) > 0$ となるならば $f \in \mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ の exposed point となる。

上の定理は exposed point となる十分条件であるが、つぎに $f \in \mathcal{U}$ が $\mathcal{U}$ の exposed point となる必要条件について考えて見よう。A を X の上の function algebra とする。A において強い意味の F. and M. Riesz の定理が成立する（今後そのことを A が条件 (R) をみたすという）とはつぎのことをいう：A の上の正測度 m が存在して、X の上の任意の測度 μ が A と直交 ($\mu \perp A$) するとき、μ は m に関して絶対連続 ($\mu \ll m$) となる。

定理 5.5　A を X の上の function algebra とし、条件 (R) をみたすと仮定する。そのとき f ($\in \mathcal{U}$) が $\mathcal{U}$ の exposed point であれば $m(F) > 0$ であるか、または $X \sim F$ が高々可附番集合である。ここで $F = \{x \in X, |f(x)| = 1\}$ である。

§6　Krein－Milman の定理

前にも述べた通り、Banach 空間のコンパクトでない閉凸集合では Krein－Milman の定理は一般には成立しない。とくに単位球を考えたとき、function algebra の単位球において Krein－Milman の定理の結論が成立するかどうかについて考

える。A を X の上の function algebra とし、$\varphi \in M_A$ に対して $\mathcal{M}_\varphi$ は φ に関しての representing measure 全体の集合を表わすことにする。$\mathcal{M}_\varphi \ni \mu_0$ が dominant であるとは、任意の $\mu \in \mathcal{M}_\varphi$ に対して $\mu \ll \mu_0$ となることをいう（Glicksberg [9] 参照）。また μ_0 が Jensen の不等式をみたすとは、$\log|\hat{f}(\varphi)| \leqq \int \log|f| d\mu_0$ $(f \in A)$ となることをいう。

定理 6.1　A を X の上の function algebra とし、つぎの条件をみたすとする。

(i)　任意の $\varphi \in M_A$ に対して、$\mathcal{M}_\varphi$ は一点からなるか、または dominant で Jensen の不等式をみたす測度を含む。

(ii)　M_A は total over A となる Gleason part P を含む。

そのとき U は U の exposed point 全体の閉凸包に一致する。ゆえに勿論 U は U の端点全体の閉凸包に一致する（[22]）.

（注意）A が logmodular algebra のとき（Hoffman [13]）および hypo-Dirichlet algebra のとき（Ahern and Sarason [2]）　A は上の条件 (i) をみたす。

略証．$\varphi_0 \in P$ を固定する。条件 (i) より $\mathcal{M}_{\varphi_0}$ は dominant な測度 μ_0 を含む。また任意の $\varphi \in P$ に対して同じく条件 (i) より $\mathcal{M}_\varphi$ は dominant で Jensen の不等式をみたす測度 μ を含む。$f \in U$ で $F = \{x : |f(x)| = 1\}$ とおいたとき、$\mu_0(F) > 0$ となるならば、f は U の exposed point であることを示そう。

さて $\varphi_0, \varphi \in P$ なるゆえ Bishop の定理より，ある $\nu \in \mathcal{M}_\varphi$ が存在して $\mu_0 \ll \nu$. μ は dominant なるゆえ $\mu_0 \ll \mu$ となる。ゆえに $\mu(F) > 0$ となる。いま $A^* \ni L$ をつぎのように定義する： $L(g) = [\mu(F)]^{-1}\int_F g\bar{f}\,d\mu$ $(g \in A)$。このとき $L(f) = 1 = \|L\|$. いまある $g \in A$ で $L(g) = 1 = \|g\|$ と仮定する。そのとき $g\bar{f} = 1$ (F の上で a.e., μ)。それゆえ正の μ 測度の集合 S の上で $g = f$ となる。μ は Jensen の不等式をみたすことから $\log|\varphi_1(f-g)| \leqq \int \log|f-g|\,d\mu = -\infty$ となり、$\varphi(f) = \varphi(g)$ となる。条件(ii)より $f = g$。それゆえ f は U の exposed point となる。つぎに上の φ_0, μ_0 を固定し、$M = \{L \in A^*$: X の上の有限複素測度 λ で $L(g) = \int_X g\,d\lambda$ $(g \in A)$, $\mu_0(S_\lambda) = 0\}$ とおく。ここで S_λ は λ の closed support を表わす。Phelps [16] で示されたように M は A^* の線型部分空間となる。つぎに M は A^* で non dense となることが証明される。それには任意の $L \in M$ に対して $\|L - \varphi_0\| \geqq 1$ となることをいえばよい。A^* のノルムは $C(X)^*/A^\perp$ の商ノルムと考えられ、$C(X)^*$ を X の上の有限複素 Baire 測度全体の空間と見做せる。$L \in M$ に対して L を表現する測度を λ, $\mu_0(S_\lambda) = 0$ とする。そのとき $\mu_0 - \lambda$ は $\varphi_0 - L$ を表現し、$\|\varphi_0 - L\| = \inf\{\|\mu_0 - \lambda + \nu\|$; $\nu \in A^\perp\}$ となる。さて任意の $\nu \in A^\perp$ に対して $\nu = h\mu_0 + \nu_s$ を Lebesgue 分解とする。ここで h は Baire 関数で ν_s は μ_0

に関して特異である。ここで Ahern [1] の generalized F. and M. Riesz の定理を用いれば $h\mu \in A^{\perp}$, $\nu_s \in A^{\perp}$ となる。$\mu_0(S_\lambda) = 0$ であるから、測度 λ は μ_0 に関して特異であり、それゆえ $\nu_s - \lambda$ はまた μ_0 に関して特異となる。ゆえに

$$\| \mu_0 - \lambda + \nu \| = \| (1+h)\mu_0 + (\nu_s - \lambda) \|$$
$$= \| (1+h)\mu_0 \| + \| \nu_s - \lambda \|$$
$$\geqq \| (1+h)\mu_0 \| \geqq \left| \int 1 (1+h) d\mu_0 \right| = \left| \int 1 d\mu_0 \right| = 1.$$

これで M は A^* の中で non dense となり、それゆえ $A^* - M$ は dense な開集合を含む。しかるに A^* の元 L で、そのノルムを U の点でとるもの ($\exists g \in U$, $L(g) = \|L\|$) 全体は A^* の中で dense (Phelps and Bishop) であるから、A^* の元 L でそのノルムの値を U の点でとり、L を表現する任意の測度 λ で $\mu_0(S_\lambda) > 0$ となるもの全体は A^* で dense となる。ここで S^* (A^* の単位球) $- M \ni L$ で、そのノルムの値を U の点でとるものは U の exposed point でそのノルムの値をとることを示す。いま $f \in A$, $\|f\| = 1$ で $L(f) = 1$ とすれば X のある正測度 λ ($\lambda(X) = 1$) が存在して、S_λ の上で $|f| = 1$ であり $L(g) = \int g \bar{f} d\lambda$ ($g \in A$) となる ([7], [4])。$\lambda \notin M$ なるゆえ $\mu_0(S_\lambda) > 0$。上に述べたことから f は U の exposed point となる。ゆえに U の exposed point f に対して $\|L\| = L(f)$ となる A^* の元 L 全体は A^* で dense となり、このことより U は U の exposed point 全体の閉凸包と一致することが確められる。

上の定理の証明と殆んど同じ証明によってつぎの定理が得られる（Fisher [4]）。

定理 6.2　A を X の上の function algebra とする。φ を M_A の元とし、M_φ が dominant な representing measure λ をもつとする。そして A はまたつぎのような性質をもつと仮定する：$f \in A$ で $\lambda(\{f=0\}) > 0$ ならば $f = 0$ となる。そのとき $\mho$ は $\mho$ の exposed point 全体の閉凸包に一致する。

（例 1）　$X = X_1 \cup X_2$，$X_1 = \{(z,t) : |z| = 1,\ t = 0\}$，$X_2 = \{(z,t) : z = 0,\ 0 \leqq t \leqq 1\}$。A は X の上で定義された連続関数で disk $\{(z,t) : |z| < 1,\ t = 0\}$ に解析的に拡張できるもの全体のなす function algebra とする。このとき f が $\mho$ の端点ならば f は定数関数となる。ゆえに $\mho$ は $\mho$ の端点全体の閉凸包に一致しない。この場合 A は定理 6.1 の (i), (ii) 共にみたさない。

（例2）　$X = \{z : |z| = 1\} \cup \{z : |z-3| = 1\}$ とする。A は X の上の連続関数で $\{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z-3| < 1\}$ に解析的に拡張できるもの全体の function algebra とする。このとき A は logmodular algebra であって (ii) をみたさないが定理 6.1 の結論をみたす。

（例3）　$\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ とする。A を $\Gamma \times [0,1]$ の上の連続関数で $\{|z| < 1\}$ に解析的に拡張できるもの全体の

function algebra とする。この場合 f が U の端点となることと $|f|=1$ となることは同等。ゆえに U が U の端点全体の閉凸包となるということは disk algebra の単位球が unimodular function (=finite Blaschke product) 全体の閉凸包に一致するということとは等しい。disk algebra の単位球が finite Blaschke product 全体の閉凸包に一致するかどうかということが open problem であったが最近それが Fisher([5], [6]) によって肯定的に解かれた(コンパクト Abel 群の場合への拡張は Rudin [20])。

参考文献

[1] P. R. Ahern : On the generalized F. and M. Riesz theorem, Pacific J. Math., 15 (1965) 373-376.

[2] P. R. Ahern and D. Sarason : The H^p spaces of a class of function algebras, Acta Math., 117 (1967) 123-163.

[3] C. Carathéodory : Theory of Functions, Vol.2, New York 1954.

[4] S. Fisher : The convex hull of the finite Blaschke products, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968) 1128-1129.

[5] ――――― : Another theorem on convex combinations of unimodular functions, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969)

1037–1039.

[6] ——— : Exposed points in spaces of bounded analytic functions, Duke Math. J., 36 (1969) 479–484.

[7] F. Forelli : Extreme points in $H^1(R)$, Can. J. Math., 19 (1967) 312–320.

[8] T. W. Gamelin and M. Voichick : Extreme points in spaces of analytic functions, Can. J. Math., 20 (1968) 919–928.

[9] I. Glicksberg : Dominant representing measures and rational approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 130 (1968) 425–462.

[10] ——— : Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962) 415–435.

[11] D. R. Goodner : The closed convex hull of certain extreme points, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964) 256–258.

[12] K. Hoffman : Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall (1962).

[13] ——— : Analytic functions and logmodular Banach algebras, Acta Math., 108 (1962) 271–317.

[14] K. de Leeuw and W. Rudin : Extreme points and extremum problems in H^1, Pacific J. Math., 8 (1958) 467–485.

[15] R. R. Phelps : Extreme positive operators and

homomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963) 265-274.

[16] ——————: Extreme points in function algebras, Duke Math. J., 32 (1965) 267-277.

[17] H. L. Royden: On a paper of Rogosinski, J. London Math. Soc., 35 (1960) 225-228.

[18] ——————: The Riemann-Roch theorem, Comment. Math. Helv., 34 (1960) 37-51.

[19] W. Rudin: Analytic functions of class H^p, Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955) 46-66.

[20] ——————: Convex combinations of unimodular functions, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969) 795-797.

[21] M. Voichick and L. Zalcman: Inner and outer functions on Riemann surfaces, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965) 1200-1204.

[22] 和田淳蔵: Function algebra の unit ball の extreme point, 早大「学術研究」(1969).